

Il metodo dell'Arc Length per analisi FEM in presenza di non linearità di materiale

Nell'ambito dell'ingegneria delle strutture esiste una vasta casistica di elementi a comportamento non lineare: dai controventi in acciaio reagenti a sola trazione alle molle rappresentative del terreno reagenti a sola compressione, fino ad arrivare a vere e proprie leggi costitutive elasto-plastiche per calcestruzzo, acciaio e muratura.

Da un punto di vista numerico questo significa che la risposta del materiale non può più essere predetta da un unico parametro (la pendenza di una retta nel piano sforzo/deformazione), bensì può essere simulata solo seguendo passo passo la relazione tra queste due grandezze.

A sua volta questo implica il passaggio ad un'analisi incrementale (sia essa statica o dinamica) in cui, ad ogni incremento di carico, appropriati algoritmi risolutivi devono essere adottati al fine di ripercorrere il più fedelmente possibile la curva (non più una retta) rappresentativa del comportamento intrinseco del materiale.

In questo articolo, forniremo un approfondimento sul metodo dell'Arc Length per l'analisi FEM in presenza di non linearità di materiale.

Analisi agli elementi finiti non lineare: i metodi

Nell'analisi agli elementi finiti non lineare, è ampiamente utilizzato il metodo incrementale (o iterativo) tradizionale Newton-Raphson (NR). Tuttavia, uno suo notevole svantaggio è che, senza il supplemento di tecniche numeriche speciali, non può essere colta una perdita di resistenza post-picco (comportamento softening). A causa della sua formulazione, infatti, il metodo di Newton-Raphson non è una buona scelta nei casi in cui la matrice di rigidità della struttura non sia puramente definita positiva, ostacolando l'analisi in problemi che mostrano instabilità sotto forma di perdita di rigidità del materiale.

Per superare questo tipo di difficoltà, spesso, il metodo NR è accompagnato da strategie numeriche di diversa natura: metodi di inversione tra controllo di carico e di spostamento (Sabir e Lock, 1972), molle fittizie (Wright e Gaylord, 1968), abbandono delle iterazioni di equilibrio nelle immediate vicinanze del picco (Bergan e Soreide, 1978; Bergan et al., 1978), o riduzione del carico (Cope e Rao, 1981; Bergan e Holand, 1979; Crisfield, 1982; Phillips e Zienkiewicz, 1976). Tuttavia, queste tecniche di solito richiedono grande cura nella gestione delle opzioni di analisi e non sempre sono in grado di fornire risultati soddisfacenti.

Il metodo dell'Arc Length, o anche comunemente chiamato "Metodo di Riks modificato", è una potente tecnica numerica per la risoluzione di sistemi di equazioni non lineari. Introdotto come estensione geometrica del suddetto metodo di Newton-Raphson, l'Arc-Length può contribuire efficacemente alla risoluzione di sistemi di equazioni altamente non lineari in modo efficiente e accurato, anche laddove NR fallisce.

Originariamente sviluppato da Riks (1972, 1979) e Wempner (1971) e successivamente modificato da Ramm (1981) e Crisfield (1981, 1982a, 1983, 1984) [1], l'Arc Length è il metodo più potente attualmente proposto dal mondo accademico per riprodurre fedelmente le relazioni tenso-deformative non lineari; è inoltre universalmente accettato come la tecnica numerica più adeguata ad evitare punti di biforcazione e tracciare lo scarico post-picco. Il metodo AL fa sì che le iterazioni all'equilibrio di Newton-Raphson convergano lungo un arco, come si può efficacemente vedere in [questo filmato](#) [2], impedendo così spesso la divergenza, anche quando la pendenza della curva di carico rispetto alla deflessione diventa zero o negativa (fenomeno dello snap-back o snap-through)

Error! Reference source not found..

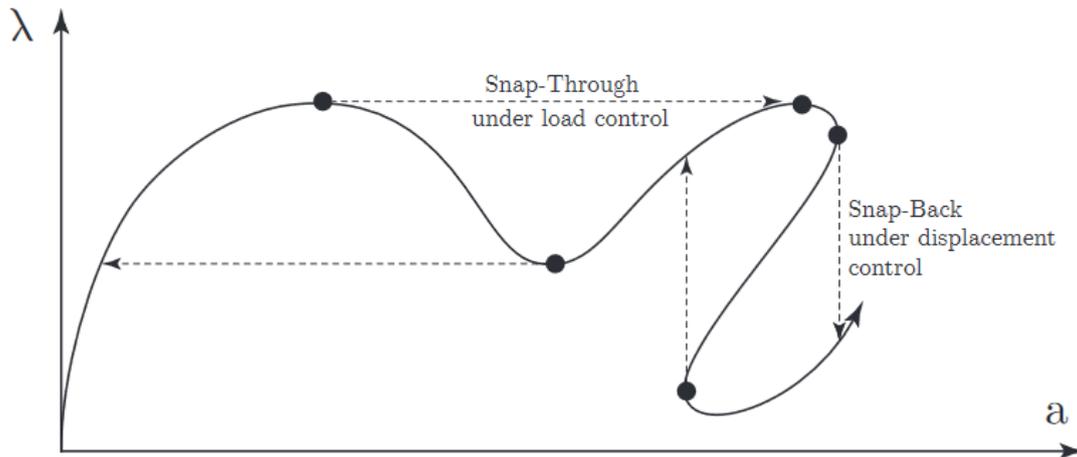


Figura 1: Rappresentazione grafica dei fenomeni dello Snap Through e Snap Back

Il metodo dell’Arc-Length è implementato nei più importanti software commerciali agli elementi finiti attualmente sul mercato: ricordiamo ad esempio [Midas Gen](#), programma di punta della software house coreana Midas IT. Ma, affinché queste complesse procedure numeriche siano rese usufruibili anche all’esterno del mondo accademico, è necessario prima di tutto mettere l’Utente in condizioni di poter gestire in modo semplice ed intuitivo le opzioni di analisi, lasciando al software l’onere di gestire, tramite opportuni valori di default, quegli aspetti più prettamente matematici che esulano dalle competenze specifiche del Professionista. Midas Gen ad esempio propone la finestra di Figura 2 per la definizione dei parametri principali, che indirizzino l’algoritmo Arc Length verso la risoluzione del sistema non lineare in esame.

Nonlinear Analysis Control ✕

Nonlinear Type

Geometry Nonlinear Material Nonlinear

Iteration Method

Newton-Raphson Arc-Length Displacement-Control

Number of Increment Steps :

Maximum Number of Iterations/Increment Step :

Initial Force Ratio for Unit Arc-Length (%) :

Maximum Displacement Boundary : mm

Convergence Criteria

Energy Norm :

Displacement Norm :

Force Norm :

Figura 2: Parametri per l’impostazione dell’algoritmo Arc Length in Midas Gen

Il metodo dell’Arc-Length in Midas Gen

Si esaminano di seguito in dettaglio le opzioni che Midas Gen lascia in capo all’Utente. Prima di tutto, è possibile utilizzare la tecnica dell’Arc Length sia in presenza di non linearità intrinseche del materiale (come finora descritto), sia per non linearità di tipo geometrico. È altresì possibile un accoppiamento delle due situazioni.

Il numero di step rappresenta solo un limite superiore, in quanto il numero strettamente necessario è automaticamente calcolato dall'algorithm, che interrompe il ciclo nel momento in cui il residuo risulti sufficientemente basso (soglia determinata in automatico dal programma sulla base del problema in esame).

Riguardo il numero massimo di iterazioni all'interno di ogni singolo step, valgono le stesse considerazioni che si potrebbero fare per Newton-Raphson, come per qualunque altra metodologia, e cioè: generalmente i software commerciali propongono un numero che si aggira intorno a 20-30 iterazioni, che è in genere sufficiente a permettere la convergenza se il problema è ben posto; risulta solitamente non utile incrementare tale valore, poiché un settaggio superiore difficilmente porterebbe al rispetto della tolleranza e, se pur lo facesse in quello step, probabilmente non risulterebbe nuovamente sufficiente in quello successivo. In sostanza: se l'algorithm ha bisogno di più di 30 iterazioni per ridurre il residuo, allora significa che probabilmente le condizioni di carico, vincolo e/o il legame costitutivo non sono tali da soddisfare l'equilibrio. Scendere sotto le 20/30 iterazioni, al contrario, potrebbe risultare troppo restrittivo.

Il parametro *Initial Force Ratio for Unit Arc Length (%)*: per comprenderne appieno il significato, bisogna esaminare la rappresentazione della procedura nel piano Spostamento normalizzato (a) vs. Incremento di carico (λ) in Figura 3.

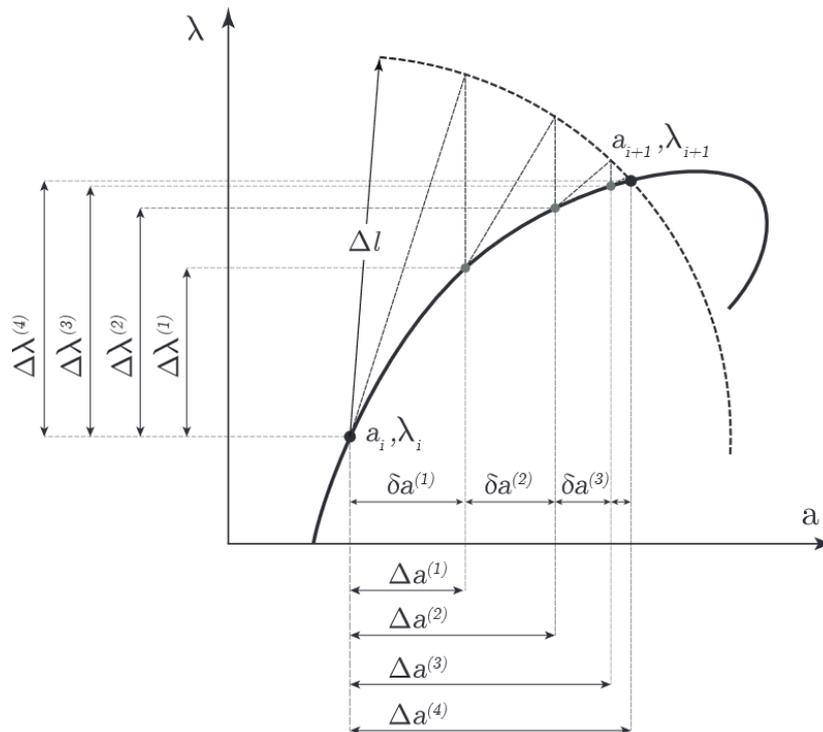


Figura 3: Procedura rappresentativa del metodo Arc Length

Il parametro *Initial Force Ratio for Unit Arc Length (%)* corrisponde a quello che nell'immagine è indicato con Δl che descrive il raggio del cerchio di centro (a_i, λ_i) , punto di arrivo dell'iterazione precedente. Da tale punto si fa poi partire la tangente alla curva, che tocca tale cerchio in $(a_i + \Delta a^{(1)}, \lambda_i + \Delta \lambda^{(1)})$. Da questo nuovo punto l'operazione si ripete fino a che il punto di coordinate $(a_i + \Delta a^{(n)}, \lambda_i + \Delta \lambda^{(n)})$ non disti dalla curva un valore sufficientemente piccolo; se tale controllo è soddisfatto, il punto $(a_i + \Delta a^{(n)}, \lambda_i + \Delta \lambda^{(n)})$ sarà battezzato come il punto di partenza per l'insieme di iterazioni

successive (a_{i+1}, λ_{i+1}).

Δl può assumere valori che vanno da un valore prossimo allo zero a 100. Nel primo caso significa seguire la curva in modo pedissequo e molto fittamente; in tal caso i tempi di calcolo e la pesantezza dei file di output possono rivelarsi inutilmente considerevoli. Nel secondo caso la curva di capacità appare come una retta che collega il punto iniziale a quello finale; è quindi assolutamente non rappresentativa. Valori intermedi consentono di ottenere una curva significativa in tempi di calcolo ragionevoli.

Infine, il parametro *Maximum Displacement Boundary* rappresenta lo spostamento massimo atteso in un qualche nodo della struttura. Questo valore assume di solito carattere indicativo: è l'algoritmo stesso che deve ricercare il massimo spostamento accettabile nel rispetto della convergenza. L'analisi si interrompe nel momento in cui il valore inserito dall'Utente viene raggiunto. Ciò non vuol dire necessariamente bloccare l'analisi in modo prematuro. Nel momento in cui, ad esempio, spostamenti molto (troppo) elevati si manifestano a causa del flusso plastico del materiale, non è strettamente necessario completare l'intera analisi per comprendere la risposta strutturale e le fonti di criticità: portare a compimento l'analisi non darebbe nessuna informazione aggiunta. Considerando che in genere si tratta di analisi locali in cui la struttura è schematizzata con decine di migliaia di elementi solidi, ogni secondo di calcolo ed ogni byte di risparmio di memoria nell'immagazzinamento dei risultati sono preziosi. Si può quindi scegliere di interromperla con un controllo sugli spostamenti, quando il quadro delle plasticizzazioni è ormai chiaro.

Infine, per quanto riguarda i criteri di convergenza, si consiglia di attivare sempre (indipendentemente da Arc Length o Newton Raphson o altro) sia il controllo sulle forze, sia sugli spostamenti; infatti, trascurare uno dei due non significa che il criterio scelto basti; il criterio scelto potrebbe essere soddisfatto e nessun warning potrebbe comparire durante l'analisi, salvo accorgersi alla fine che i risultati non sono accettabili, circostanza che sarebbe stata intercettata attivando anche il criterio trascurato.

La presenza del metodo dell'Arc Length risulta indispensabile in tutti quei software commerciali che implementano legami costitutivi con possibilità di perdita di rigidità dopo il raggiungimento del picco; ricordiamo ad esempio il Concrete Damage Plasticity, disponibile in codici come Midas Gen ed Abaqus, in grado di descrivere il comportamento del calcestruzzo in modo asimmetrico, distinguendo tra trazione e compressione, con possibilità di tenere in conto il progressivo danneggiamento sotto carico ciclico (analisi dinamiche non lineari) e con criterio di rottura fondato su resistenza a trazione e compressione (Figura 4 e Figura 5).

Si ricorda altresì il Total Strain Crack, disponibile nel nuovo Midas FEA NX e in Diana, in grado oltre a quanto già evidenziato per il legame precedente, di tenere conto di una relazione tra sforzi di taglio e distorsioni e di fornire la direzione di propagazione delle fessure.

Compressive Behavior

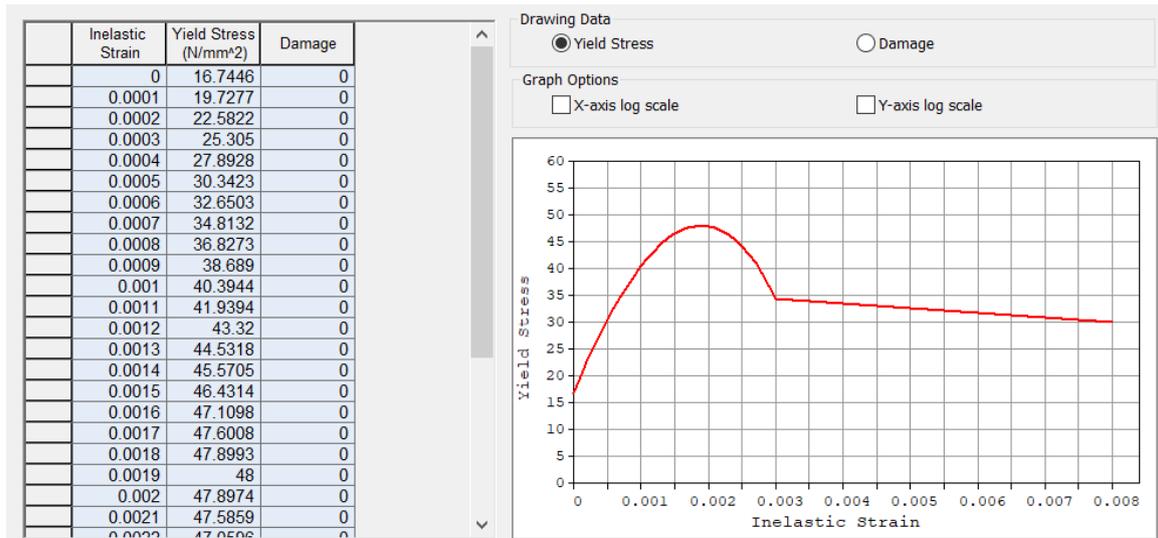


Figura 4: Tipica curva sforzo-deformazione plastica a compressione per un cls C40/50

Tensile Behavior

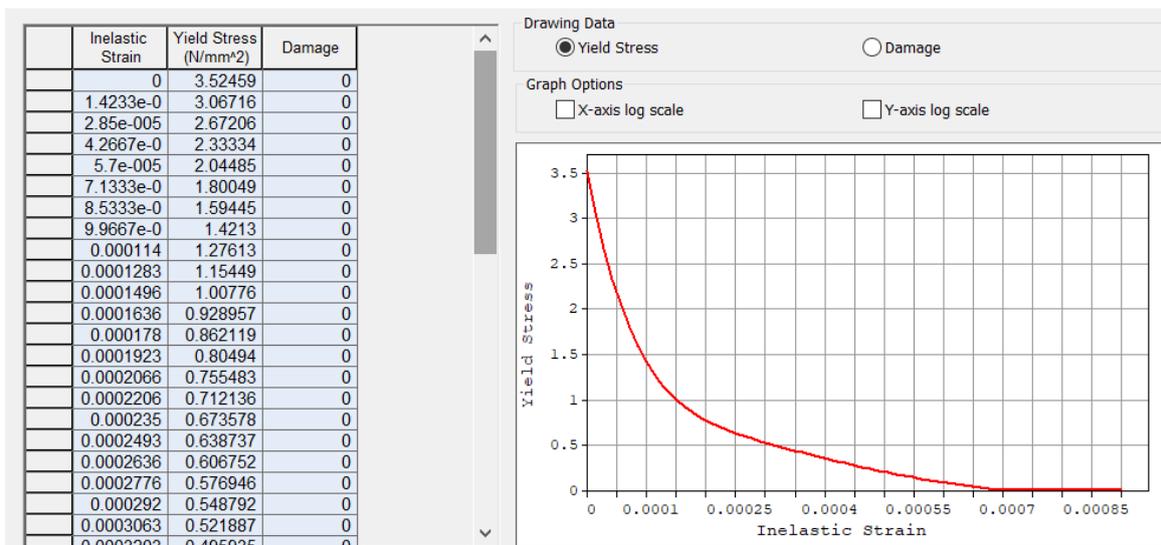


Figura 5: Tipica curva sforzo-deformazione plastica a trazione per un cls C40/50

Per quanto riguarda le situazioni tipiche di utilizzo, è sempre bene ricorrere ad algoritmi in grado di cogliere la caduta di rigidità post-picco, qualora si debba formulare un quadro preciso sulla redistribuzione delle azioni conseguenti alla perdita di alcune componenti strutturali. A titolo di esempio, si riporta in Figura 6 la zona di applicazione del carico in un elemento fondazionale analizzato con Midas Gen, in cui al calcestruzzo sono state attribuite le curve di Figura 4 e Figura 5. I parametri utilizzati per l'Arc Length sono quelli riportati in Figura 2.

La Figura 6 riporta le deformazioni plastiche a compressione (a sinistra) e a trazione (a destra). È possibile notare l'innescò nella zona di applicazione del carico e la propagazione verso l'interno del corpo in calcestruzzo. Le deformazioni nascono inevitabilmente anche a trazione, determinando delle fessurazioni diagonali a fronte dello schiacciamento verticale.

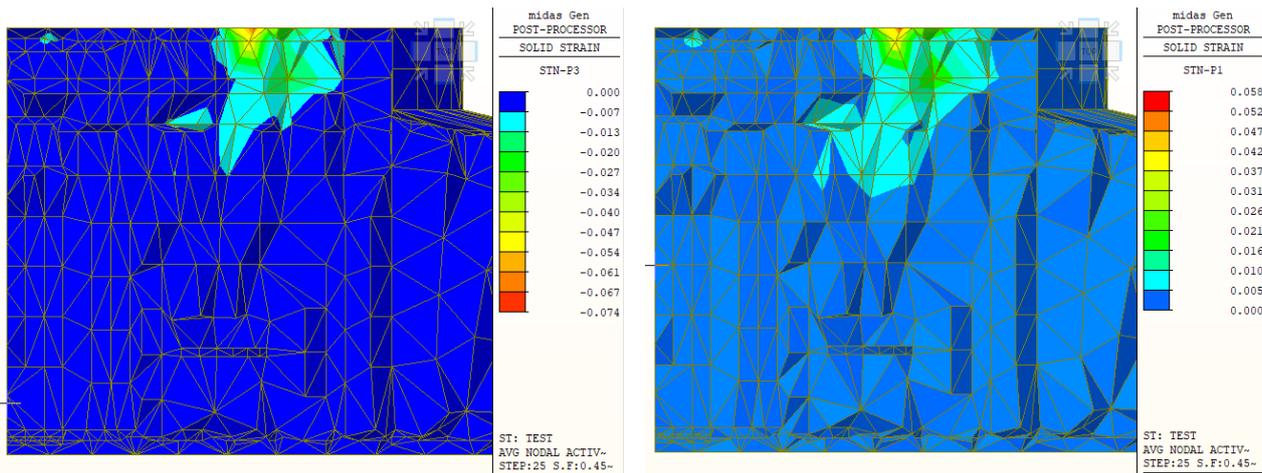


Figura 6: Deformazioni plastiche principali a compressione (a sinistra) e a trazione (a destra)

Come si può osservare dalla legenda, i valori di deformazione plastica sono ormai ben oltre i corrispondenti valori di picco, provocando una perdita notevole di rigidità in tutta la zona evidenziata. Ciò è reso evidente ad esempio plottando la mappa degli sforzi a trazione, in cui l'intera zona ha raggiunto una rigidità praticamente nulla Figura 7.

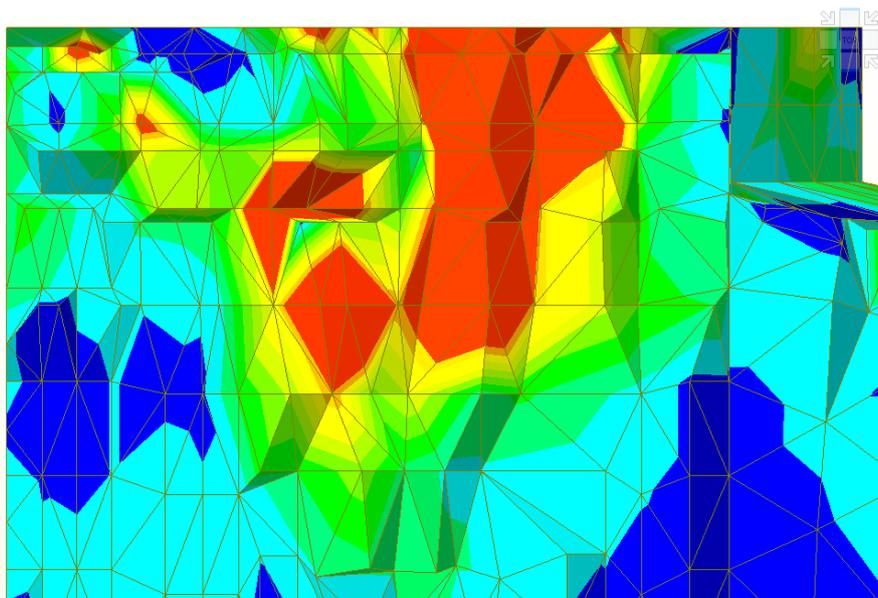


Figura 7: Sforzi principali di trazione

Conclusioni

Una simulazione di questo tipo ha permesso di ridistribuire sull'armatura le azioni non più supportabili dal calcestruzzo, permettendo un'ottimizzazione della stessa.

Legami costitutivi di tipo elastici-perfettamente plastici, molto diffusi nei software commerciali, non permetterebbero un'adeguata valutazione di questo tipo in quanto lascerebbero al calcestruzzo la capacità di sopportare all'infinito lo sforzo di picco. Legami di questo tipo possono comunque fornire indicazioni preliminari in vista di analisi più raffinate e per essi il metodo di Newton Raphson rimane più che sufficiente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. Lafontaine, X. Wang, K. Huang, M. Yuan and E. Oñate, On the arc length method: combining ideas and implementations aspects, (2013). Research Report, Nº PI399 URL https://www.scipedia.com/public/Lafontaine_et_al_2013b
- [2] Nonlinear Analysis of Structures: The Arc Length Method, Nikolaos Vasios PhD Student, Materials Science & Mechanical Engineering Email Address: vasios@g.harvard.edu